

07/04/16

Φύλλο 4

α6κ6

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R}$$

i) ορίστε ευκλ. γινόμενο (αντί ικανοποιεί τις 3 ιδιότητες)

Επιμέτρηση : $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$

$$\langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle = 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2a_2$$

Τα αποτελέσματα είναι ίδια!

Διανεμητικότητα: i) $\langle (a_1, a_2) + (a_1', a_2'), (b_1, b_2) \rangle =$

$$= \langle (a_1 + a_1', a_2 + a_2'), (b_1, b_2) \rangle =$$

$$= 5(a_1 + a_1')b_1 - 2(a_1 + a_1')b_2 - 2(a_2 + a_2')b_1 + (a_2 + a_2')b_2 =$$

$$= 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2 + 5a_1'b_1 - 2a_1'b_2 - 2a_2'b_1 + a_2'b_2 = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle + \langle (a_1', a_2'), (b_1, b_2) \rangle$$

ii) $\langle \lambda(a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = \langle (\lambda a_1, \lambda a_2), (b_1, b_2) \rangle =$

$$= 5\lambda a_1b_1 - 2\lambda a_1b_2 - 2\lambda a_2b_1 + \lambda a_2b_2 =$$

$$= \lambda(5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) = \lambda \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$$

iii) $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) + (b_1', b_2') \rangle = \langle (b_1, b_2) + (b_1', b_2'), (a_1, a_2) \rangle =$

$$\langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle + \langle (b_1', b_2'), (a_1, a_2) \rangle =$$
$$= \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle + \langle (a_1, a_2), (b_1', b_2') \rangle$$

iv) $\langle (a_1, a_2), \lambda(b_1, b_2) \rangle = \langle \lambda(b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle =$

$$= \lambda \langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle = \lambda \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$$

Θετικά ορισμένη:

$$\langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle = 5a_1a_1 - 2a_1a_2 - 2a_2a_1 + a_2a_2 = 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 = (2a_1 - a_2)^2 + a_1^2 \geq 0 \quad \neq$$

$$(2a_1 - a_2)^2 = 4a_1^2 + a_2^2 - 4a_1a_2$$

Κοιτάζω την ιδιότητα (=0)

Έστω $\langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle = 0 \Rightarrow$ από (*) προκύπτει:

$$a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 = 0 \Rightarrow a_1^2 = 0 \text{ και } 2a_1 - a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \text{ και } a_2 = 0$$

άρα $(a_1, a_2) = (0, 0)$ [είναι στον $\mathbb{R}^2$]

ii) Μήκος

$$\bullet \| (1, 0) \| = \sqrt{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{5}$$

$$\bullet \| (0, 1) \| = \sqrt{\langle (0, 1), (0, 1) \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$$

Είναι κάθετα μεταξύ τους

$\rightarrow \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = -2 \Rightarrow$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους!

$\rightarrow$ Μπορώ να τα γράψω σαν πίνακα:

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός γιατί εκτός διαγωνιάς έχω τα ίδια στοιχεία!

$\mathbb{R}_n[x]$ διαστάσεων $n+1$.

Βασική των $\mathbb{R}_n[x]$: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

α6κ7

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$

$$\underbrace{r_0, r_1, \dots, r_n}_{n+1 \text{ στοιχεία}}$$

1) (συμμεταστροφή)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n) = \\ &= g(r_0)f(r_0) + g(r_1)f(r_1) + \dots + g(r_n)f(r_n) = \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

2) (Συμμεταστροφή)

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(r_0)g(r_0) + \dots \\ &+ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(r_n)g(r_n) = (\lambda_1 f_1(r_0) + \lambda_2 f_2(r_0))g(r_0) + \\ &\dots + (\lambda_1 f_1(r_n) + \lambda_2 f_2(r_n))g(r_n) = \\ &= \lambda_1 f_1(r_0)g(r_0) + \lambda_2 f_2(r_0)g(r_0) + \dots + \lambda_1 f_1(r_n)g(r_n) + \lambda_2 f_2(r_n)g(r_n) \\ &= \lambda_1 (f_1(r_0)g(r_0) + f_1(r_1)g(r_1) + \dots + f_1(r_n)g(r_n)) \\ &+ \lambda_2 (f_2(r_0)g(r_0) + \dots + f_2(r_n)g(r_n)) = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle &= \langle \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, f \rangle = \lambda_1 \langle g_1, f \rangle + \\ &+ \lambda_2 \langle g_2, f \rangle = \lambda_1 \langle f, g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, g_2 \rangle \end{aligned}$$

3) (Θεωρία οριζώντων)

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= f(r_0)f(r_0) + f(r_1)f(r_1) + \dots + f(r_n)f(r_n) = \\ &= f(r_0)^2 + f(r_1)^2 + \dots + f(r_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f(r_0) = f(r_1) = \dots = f(r_n) = 0$$

$f(r_0) = 0 \Rightarrow r_0$ ρίζα των f } Για $r_0 \neq r_1 \neq \dots \neq r_n$
 $f(r_n) = 0 \Rightarrow r_n$ ρίζα των f } Άρα τα f έχει $n+1$
διαφορετικές ρίζες

Το $\mathbb{R}_n[x]$ έχει n ρίζες $\Rightarrow$ (Εάν για οποιονδήποτε $n+1$
κατά τον n βαθμό, τότε είναι το μηδέν)

Είναι πολυώνυμο βαθμού n έχει το n ή $n-1$ ρίζες. Αν έχει παραπάνω, τότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Θεώρημα: Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ευκλείδειος χώρος και $\vec{a}, \vec{b} \in E$. Τότε:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$$

Είναι αυτονόητο ο νόμος των συνθετώνων.

Απόδειξη: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle =$
 $= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$
 $= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$ (γιατί το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό).

Θεώρημα: $\vec{a} \perp \vec{b}$ αν και μόνο αν $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Απόδειξη με διάνυσμα ευθυγράμμιση ή δύο κατασκευές

Απόδειξη: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \iff \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

Θεώρημα: Ανισότητα Cauchy-Schwarz:

Έστω E Ευκλείδειος χώρος και $\vec{a}, \vec{b} \in E$. Τότε:

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad \text{σηλαδή:}$$

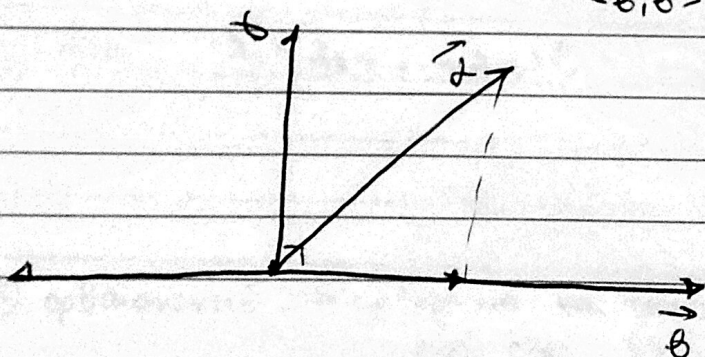
(i)

$$-\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad \text{(ii)}$$

ή ακόμα $(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$ (ήτοι ισχύει με διάνυσμα ευθυγράμμιση)

Απόδειξη: (i) Αν $\vec{b} = \vec{0}$, τότε $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = 0 \iff \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| = 0$ ισχύει η ανισότητα.
(ii) Αν $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{f} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}$

Ισχυρίζομαστε ότι $\vec{f} \perp \vec{b}$.



$$\begin{aligned}\langle \vec{\gamma}, \vec{\theta} \rangle &= \langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle - \langle \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle = \\ &= \langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \cdot \langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle = 0\end{aligned}$$

Επομένως $\langle \vec{\gamma}, \vec{\theta} \rangle = 0 \iff \vec{\gamma} \perp \vec{\theta}$

Άρα $\vec{\gamma} \perp \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta}$ και εφαρμόζω το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\left\| \vec{\gamma} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta} \right\|^2 = \|\vec{\gamma}\|^2 + \left\| \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta} \right\|^2$$

$$\vec{\gamma} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta}$$

$$(*) \quad \|\lambda \vec{\theta}\|^2 = \langle \lambda \vec{\theta}, \lambda \vec{\theta} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle = \lambda^2 \|\vec{\theta}\|^2$$

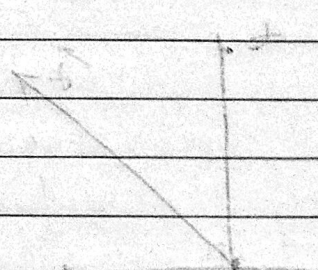
Έχουμε ότι:

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{\gamma}\|^2 + \left\| \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta} \right\|^2 \geq \left\| \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle} \vec{\theta} \right\|^2 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle^2}{\langle \vec{\theta}, \vec{\theta} \rangle^2} \|\vec{\theta}\|^2 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle^2}{(\|\vec{\theta}\|^2)^2} \|\vec{\theta}\|^2$$

$$\text{Επομένως: } \|\vec{a}\|^2 \geq \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle^2}{\|\vec{\theta}\|^2} \Rightarrow \boxed{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle^2 \geq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{\theta}\|^2} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle^2}{\|\vec{\theta}\|^2}$$

Άρα έχω την ανίσωση που ήθελα:

$$|\langle \vec{a}, \vec{\theta} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{\theta}\|$$



Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορθοκανονικό

είναι
ορθογώνιο

→ κάθε διάνυσμα
έχει μήκος 1

Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος.

Ορισμός: Έστω $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in E$. Το σύνολο $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ λέγεται ορθογώνιο αν $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.
Το σύνολο $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$, με δ_{ij} το δ του Kronecker.

Ανταδίδει έχουμε για τα $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ότι

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Για $i \neq j$ έχουμε $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ορθογώνιο.

Για $i = j$ έχουμε $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 1 \Rightarrow \|\vec{b}_i\| = 1$.

Θεώρημα: Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ ένα σύνολο μη-κυβανικών ορθογώνιων διανυσμάτων. Τότε $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη: $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_i \vec{b}_i + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{0}, \vec{b}_i \rangle = \langle \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_i \vec{b}_i + \dots + \lambda_n \vec{b}_n, \vec{b}_i \rangle = \\ &= \lambda_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_i \rangle + \dots + \lambda_i \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle \vec{b}_n, \vec{b}_i \rangle = \\ &= \lambda_i \|\vec{b}_i\|^2. \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{Επειδή } \vec{b}_i \neq \vec{0}, \|\vec{b}_i\| \neq 0) \end{aligned}$$

Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ και άρα $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ (για).

⊛ ορθοκανονικό $\Rightarrow$ ορθογώνιο και μη-κυβανικά διανύσματα, αφού όλα έχουν μήκος 1.

► Προκύπτει ότι $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

Επομένως, $-\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ $\xleftrightarrow{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| > 0}$

$$\iff -1 \leq \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \leq 1$$

Υπάρχει $\hat{\theta} \in [0, \pi]$ τέτοια ώστε $\cos \hat{\theta} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$

Την γωνία αυτή την αποκαλούμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$

Θεώρημα : Ανισότητα Minkowski

Τριγωνική

ανισότητα

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

Απόδειξη:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 \implies$$

$$\implies \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad (\text{φράγμα τα τετράγωνα, αφού όλα είναι θετικά})$$



Παρατήρηση : Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz προκύπτουν οι εξής μη-οραφανείς ειρή:

$$(i) \text{ (Στων } \mathbb{R}^n) \quad |x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

$$(ii) \quad \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 g(x)^2 dx}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθούν.

Πρόταση: Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ ένα ορθοκανονικό εύλο διανυσμάτων. Τότε τα $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Δείξη: Έστω E Ευκλείδειος χώρος διάστασης n και τα $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ είναι ένα ορθοκανονικό εύλο διανυσμάτων. Τότε τα $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ αποτελούν βάση του E αν συμβεί και ορθοκανονική.

Η απόδειξη είναι προφανής:

Τα $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ είναι $(\sum)$ και η β αριθμός όσο και η διάσταση του E . Άρα αποτελούν βάση του χώρου.

Στον χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, \dots, a_n) (b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{f}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \vec{f}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vec{f}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ \vec{f}_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle = \langle (0, 0, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, 1, 0) \rangle = \delta_{ij} \\ \text{Όταν } i \neq j \Rightarrow 0 \\ i = j \Rightarrow 1. \end{array}$$

Άρα $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ ορθοκανονική βάση.

⊛ Οποιαδήποτε βάση μας δίδουν στον $\mathbb{R}^n$ μπορούν να γίνουν ορθοκανονική